

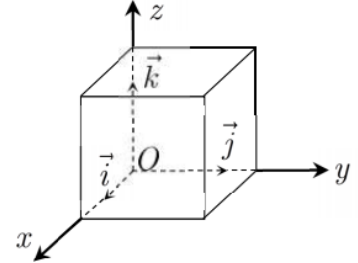
CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

I. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Định nghĩa hệ trục tọa độ

Hệ gồm ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian hay còn gọi là hệ trục $Oxyz$.



Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

2. Tọa độ vectơ

Định nghĩa: $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x, y, z)$

Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

1. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

2. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

3. $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

4. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ (Tích vô hướng)

6. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

7. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

8. $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ (Tích có hướng)

• $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$

• $\|[\vec{a}, \vec{b}]\| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

9. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \\ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0) \\ \vec{a} = k \cdot \vec{b} \end{cases}$

10. A, B, C, D là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

11. A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$

12. A, B, C là 3 đỉnh của tam giác $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương

13. A, B, C, D lập thành tứ diện $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$ (Tích hỗn tạp khác 0)

14. A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ (Tích hỗn tạp bằng 0)

3. Tọa độ điểm và các công thức khác

Định nghĩa: $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \Leftrightarrow M(x, y, z)$ (x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)

Chú ý:

$$M \in (Oxy) \Rightarrow M(a; b; 0), M \in (Oxz) \Rightarrow M(a; 0; c), M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; b; c)$$

$$M \in Ox \Rightarrow M(a; 0; 0), M \in Oy \Rightarrow M(0; b; 0), M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; c)$$

Tính chất: Cho $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. (ngọn - gốc).

2. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

3. M trung điểm AB : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

4. G trọng tâm của tam giác ABC suy ra $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

5. G trọng tâm của tứ diện $ABCD$ suy ra $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$

6. Diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$

7. Thể tích khối tứ diện $A.BCD$: $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$

8. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(2; 1; -3)$, $B(4; 2; 1)$, $C(3; 0; 5)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

A. $G(3; 1; -1)$.

B. $G(3; 1; 1)$.

C. $G(1; 3; 1)$.

D. $G(-1; 3; 1)$.

Lời giải

Chọn B

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} x_G = \frac{2+4+3}{3} = 3 \\ y_G = \frac{1+2+0}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3+1+5}{3} = 1 \end{cases}$$

Vậy $G(3;1;1)$.

- Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cho hai vector $\vec{a} = 1; 2; 3$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. Tính tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$
- A. $\vec{u}(-1; 2; 7)$. B. $\vec{u}(-1; 6; 3)$. C. $\vec{u}(-1; 2; -1)$. D. $\vec{u}(-1; -2; 3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} - 2\vec{i} - 4\vec{k} = -1\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = -1; 2; 7.$$

- Câu 3.** Hai điểm M và M' phân biệt và đối xứng nhau qua mặt phẳng Oxy . Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A. Hai điểm M và M' có cùng tung độ và cao độ.
B. Hai điểm M và M' có cùng hoành độ và cao độ.
C. Hai điểm M và M' có hoành độ đối nhau.
D. Hai điểm M và M' có cùng hoành độ và tung độ.

Lời giải

Chọn D

- Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ hình chiếu M lên trục Ox .
- A. $2; 0; 0$. B. $1; 0; 0$. C. $3; 0; 0$. D. $0; 2; 3$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ lên trục Ox là $M'(x_0; 0; 0)$.

Vậy hình chiếu của $M(1; 2; 3)$ lên trục Ox là $M'(1; 0; 0)$.

- Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (Oxy)
- A. $N(-1; -2; -3)$. B. $N(1; 2; 0)$. C. $N(-1; -2; 3)$. D. $N(1; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi điểm $N(x'; y'; z')$ đối xứng với điểm $M(x; y; z)$ qua mặt phẳng (Oxy) nên

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = -3 \end{cases} \Rightarrow N(1; 2; -3)$$

- Câu 6.** Câu nào sau đây sai?

A. $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; 1; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; 0; -5\right)$.

C. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; -3; 0)$.

D. $\vec{a} = \frac{2}{5}\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; \frac{2}{5}; 1\right)$

Lời giải

Chọn B

Vì $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; -5; 0\right)$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

A. $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

B. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

C. $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

D. $\vec{u} = (-1; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overline{OM} = (1; 5; 2)$, $\overline{ON} = (3; 7; -4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Tìm tọa độ điểm P .

A. $P(5; 9; -10)$.

B. $P(7; 9; -10)$.

C. $P(5; 9; -3)$.

D. $P(2; 6; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overline{OM} = (1; 5; 2) \Rightarrow M(1; 5; 2)$, $\overline{ON} = (3; 7; -4) \Rightarrow N(3; 7; -4)$.

Vì P là điểm đối xứng với M qua N nên N là trung điểm của MP nên ta suy ra được

$$\begin{cases} x_P = 2x_N - x_M = 5 \\ y_P = 2y_N - y_M = 9 \\ z_P = 2z_N - z_M = -10 \end{cases} \Rightarrow P(5; 9; -10).$$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 5; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

A. $\vec{a} = (-8; 9; -1)$.

B. $\vec{a} = (-8; -9; 1)$.

C. $\vec{a} = (8; -9; -1)$.

D. $\vec{a} = (-8; -9; -1)$.

Lời giải

Chọn D

$2\vec{u} = (-2; 6; -4)$; $3\vec{v} = (6; 15; -3) \Rightarrow \vec{a} = (-8; -9; -1)$ (do $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$).

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overline{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

A. $A(-2; -3; 7)$.

B. $A(2; -3; -7)$.

C. $A(2; 3; 7)$.

D. $A(2; -3; 7)$.

Lời giải

Chọn D

Do $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (x; y; z) \Rightarrow \overline{OA} = (2; -3; 7) \Rightarrow A(2; -3; 7)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -1; 4)$ và $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{b} = (1; 0; -3)$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 12 = -10$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u} = \vec{i}\sqrt{3} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j}\sqrt{3} + \vec{k}$. Khi đó tích vô hướng của $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

A. -3

B. 3

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{u} = (\sqrt{3}; 0; 1)$ và $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$. Suy ra $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 1 = 1$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (-1; 1; m)$, $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Vectơ $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$ khi

A. $m = -2$

B. $m = 0$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -1.1 + 1.0 + m.1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (-2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$. Vectơ $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$ khi

A. $m = 2$

B. $m = 0$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 16. Góc tạo bởi hai véc tơ $\vec{a} = (2; 2; 4)$; $\vec{b} = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0)$ bằng

A. 45° .

B. 90° .

C. 135° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (-2; 1; 1)$, góc giữa hai vectơ đã cho bằng

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Áp dụng công thức } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-1; 3; 2)$; $C(2; 4; -3)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ là

A. AD .

B. -6 .

C. 2 .

D. -2 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-4; 1; 1) \text{ và } \overrightarrow{AC} = (-1; 2; -4). \text{ Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 2 - 4 = 2.$$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây vuông góc với vectơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$?

A. $\vec{m} = (1; 7; 1)$.

B. $\vec{w} = (0; -1; 0)$.

C. $\vec{n} = (-1; 7; -1)$.

D. $\vec{p} = (0; 7; 1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{ suy ra } \vec{w} = (0; -1; 0) \text{ vuông góc với } \vec{u} = (-1; 0; 2).$$

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$, $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$.

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6.$$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây *sai*?

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

D. $\vec{a} \perp \vec{b}$

Lời giải

Chọn B

• Xét đáp án A: $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ đúng.

• Xét đáp án B: $\vec{a} = 2(1; -1; -2) \neq \vec{b} = (1; -1; 1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Đáp án B sai.

• Xét đáp án C: $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ đúng.

• Xét đáp án D: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2.1 + (-2).(-1) + 4.1 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ đúng.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;3;0)$, $B(-2;-2;0)$, $C(3;1;0)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$

B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$

C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{AB} = (-3; -5; 0)$, $\vec{AC} = (2; -2; 0)$.

$$\text{Khi đó: } \cos A = \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

A. 120° .

B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{AB} = (-1; 0; 1)$, $\vec{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

$$\text{Nên diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-4; -2; 6)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{b} = -2\vec{a}$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.

D. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $\vec{b} = -2\vec{a}$. Từ đó suy ra vector $\vec{a}$ ngược hướng với vector $\vec{b}$ và $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 6 = -28 \neq 0.$$

Do đó đáp án B sai.

Câu 26. Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11.$$

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \Leftrightarrow 3 - m = 1 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 28. Trong Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$ Góc giữa hai vector $\vec{v}$ và $\vec{u} - \vec{v}$ bằng

A. 30° .

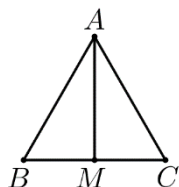
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Vẽ tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm BC .

Ta chọn $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$ thỏa mãn giả thiết bài toán.

$$\text{Suy ra } \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}.$$

$$\text{Khi đó } (\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ.$$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (2; -1; 2)$ và vector $\vec{v}$ có độ dài bằng 1 thỏa mãn $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$. Độ dài của vector $\vec{u} + \vec{v}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} |\vec{u}| = 3 \Rightarrow \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = 9 \\ |\vec{v}| = 1 \Rightarrow \vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 = 1 \end{cases} \cdot (1)$

Từ $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$, suy ra $16 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\vec{v} \quad (2)$

Kết hợp (1) và (2), ta được $2\vec{u}\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 9 + 1 - 4^2 = -6$.

Khi đó $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v} = 9 + 1 - 6 = 4$.

Vậy $|\vec{u} + \vec{v}| = 2$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = 2$. B. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z).$$

$$\overrightarrow{AB} = (7; 3; 1).$$

$$\overrightarrow{AM} = (x + 2; -3; z - 1).$$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z - 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2) \Rightarrow BM = \sqrt{118}$$

$$\overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow AM = \sqrt{59}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -4; 2)$, $B(4; 2; -3)$, $C(-3; 1; 5)$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành $ABCD$.

- A. $D(-6; -5; -10)$. B. $D(0; 7; 0)$. C. $D(-6; -5; 10)$. D. $D(-2; -1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $D(x; y; z)$.

$$\text{Ta có } ABCD \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = 3 \\ 1 - y = 6 \\ 5 - z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -5 \\ z = 10 \end{cases}.$$

Vậy $D(-6; -5; 10)$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

- A. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. B. $M(4; -3; 8)$. C. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. D. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - 3x_B}{1-3} = 4 \\ y_M = \frac{y_A - 3y_B}{1-3} = -3 \\ z_M = \frac{z_A - 3z_B}{1-3} = 8 \end{cases}$$

Vậy $M(4; -3; 8)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(5; -1; 2)$, $C(3; 2; -4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. B. $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. C. $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. D. $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y; z)$.

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x+2(5-x)-(3-x)=0 \\ 1-y+2(-1-y)-(2-y)=0 \\ 1-z+2(2-z)-(-4-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=\frac{9}{2} \end{cases}$$

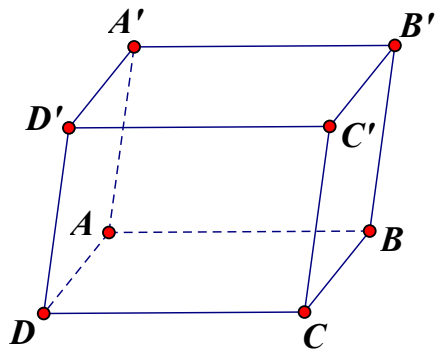
Vậy $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 1)$, $A'(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm C' .

- A. $C'(13; 4; 4)$. B. $C'(7; 4; 4)$. C. $C'(10; 4; 4)$. D. $C'(-13; 4; 4)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (3; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4).$$

- Câu 35.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn véc tơ $\vec{a} = (2; 0; 3)$, $\vec{b} = (-3; -18; 0)$, $\vec{c} = (2; 0; -2)$ và $\vec{x} = 2\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3} + 3\vec{c}$. Trong các bộ số sau, bộ số nào là tọa độ của $\vec{x}$?
- A.** $(-3; 2; 0)$. **B.** $(-9; 6; 0)$. **C.** $(3; -2; 0)$. **D.** $(11; -6; 0)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{a} = (2; 0; 3) \\ \vec{b} = (-3; -18; 0) \\ \vec{c} = (2; 0; -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\vec{a} = (4; 0; 6) \\ -\frac{\vec{b}}{3} = (1; -6; 0) \\ 3\vec{c} = (6; 0; -6) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = 2\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3} + 3\vec{c} = (11; -6; 0).$$

Vậy $\vec{x} = (11; -6; 0)$.

- Câu 36.** Trong không gian $Oxyz$, Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- A.** $m = 4; n = -3$. **B.** $m = 1; n = 0$. **C.** $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy $m = 7; n = -\frac{3}{4}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 1; 2)$, $\vec{c} = (x; 3x; x + 2)$. Nếu 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng thì x bằng?

A. -1.

B. 2.

C. 1.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} \vec{a} = (1; 2; 1) \\ \vec{b} = (-1; 1; 2) \end{cases} \Rightarrow [\vec{a}; \vec{b}] = (3; -3; 3).$

Khi đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow 3x - 9x + 3(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $x = 2$.

Câu 38. Cho bốn điểm $O(0; 0; 0)$, $A(0; 1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(4; 3; m)$. Tìm m để 4 điểm O , A , B , C đồng phẳng.

A. $m = 14$.

B. $m = 7$.

C. $m = -14$.

D. $m = -7$.

Lời giải

Chọn A

4 điểm O , A , B , C đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

Ta có.

$\overrightarrow{OA} = (0; 1; -2)$

$\overrightarrow{OB} = (1; 2; 1)$

Suy ra $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (5; -2; -1)$.

Mà $\overrightarrow{OC} = (4; 3; m)$. Khi đó $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 20 - 6 - m = 0 \Leftrightarrow m = 14$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$ và $C(0; -1; 2)$, $D(0; m; k)$. Hệ thức giữa m và k để bốn điểm $ABCD$ đồng phẳng là

A. $2m + k = 0$.

B. $m + k = 1$.

C. $2m - 3k = 0$.

D. $m + 2k = 3$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB} = (0; 2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-1; m + 2; k)$.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (5; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = m + 2k - 3.$$

$$\text{Vậy bốn điểm } ABCD \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 2k = 3.$$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; -4), B(1; y; -1), C(x; 1; 3)$. Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng giá trị $6x - 7y$ là

- A. -1 B. 13 C. -13 D. -12

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả sử } \overrightarrow{AB} = (-1; y-2; 3), \overrightarrow{AC} = (x-2; -1; 7).$$

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{3}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow 6x - 7y = -13.$$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; -2), C(3; 3; 0)$ và $BC = 5, AB = 3$, đường phân giác góc B cắt AC tại điểm $D(a; b; c)$. Khi đó $8a - 4b - 24c$ bằng

- A. 42 B. -15 C. 30 D. 37

Lời giải

Chọn D

$$D \text{ là chân đường phân giác góc } B \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{4} \\ b = \frac{7}{4} \\ c = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8a - 4b - 24c = 37.$$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(-1; 1; 3)$ là trọng tâm của tam giác ABC , $M(2; -5; 1)$ là trung điểm của AC . Giả sử $B(a; b; c)$ thì $2a + b - 3c$ bằng

- A. 24 B. -22 C. -20 D. 17

Lời giải

Chọn B

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \begin{cases} -1-a=6 \\ 1-b=-12 \\ 3-c=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=13 \\ c=7 \end{cases} \Rightarrow 2a+b-3c=-22.$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-1; 1; 3), \vec{b} = (0; 1; -1), \vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{d} = (-1; 0; 1)$. Tồn tại số thực m, n, p sao cho $\vec{b} = m\vec{c} - n\vec{a} + p\vec{d}$. Khi đó $2m + 3n - p$ bằng

- A. -11 B. 24 C. -8 D. 16

Lời giải

Chọn A

$$\vec{b} = m\vec{c} - n\vec{a} + p\vec{d} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n - p = 0 \\ -3m - n = 1 \\ 4m - 3n + p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ n = -\frac{1}{4} \\ p = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow 16m + 4n + 8p = -11.$$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(2;3;0)$. Biết rằng tam giác ABC có trục tâm $H(0;3;2)$ tìm tọa độ của điểm C .

- A.** $C(3;2;3)$. **B.** $C(4;2;4)$. **C.** $C(1;2;1)$. **D.** $C(2;2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $C(a;b;c)$.

$$\overrightarrow{AH} = (-1;2;1), \overrightarrow{BH} = (-2;0;2), \overrightarrow{AC} = (a-1;b-1;c-1), \overrightarrow{BC} = (a-2;b-3;c), \overrightarrow{AB} = (1;2;-1)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2c+b-3, -a-c+2, b-2a+1).$$

$$\text{Ta có } H \text{ là trục tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -a+2+2b-6+c=0 \\ -2a+2+2c-2=0 \\ -2c-b+3-2a-2c+4+b-2a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b+c=4 \\ -2a+2c=0 \\ -4a-4c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Vậy $C(1;2;1)$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A.** $T = 8$ **B.** $T = 2$ **C.** $T = 6$ **D.** $T = 14$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} = (0;2;-2), \overrightarrow{OB} = (2;2;-4), \overrightarrow{OI} = (a;b;c)$$

$$\overrightarrow{AI} = (a;b-2;c+2), \overrightarrow{BI} = (a-2;b-2;c+4)$$

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB nên ta có hệ
$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \\ [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \overrightarrow{OI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c+2)^2 = (a-2)^2 + (c+4)^2 \\ (b-2)^2 + (c+2)^2 = b^2 + c^2 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=4 \\ -b+c=-2 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-2 \end{cases}.$$

Vậy $I(2;0;-2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$.

- Câu 46.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC biết $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$. $H(x;y;z)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Khi đó giá trị của $S = x + y + z$ bằng
- A. $\frac{38}{9}$. B. $\frac{34}{11}$. C. $\frac{30}{11}$. D. $\frac{11}{34}$.

Lời giải

Chọn B

$A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$, $H(x;y;z)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;2;0)$;

$\overrightarrow{AC} = (-1;1;3)$; $\overrightarrow{BC} = (1;-1;3)$; $\overrightarrow{AH} = (x-2;y;z)$; $\overrightarrow{BH} = (x;y-2;z)$;

$H(x;y;z)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ [\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}] = \vec{0} \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-y+3z=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3} \\ 6(x-2)+6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{11} \\ y = \frac{18}{11} \\ z = \frac{12}{11} \end{cases}$$

Như vậy $S = x + y + z = \frac{34}{11}$.

- Câu 47.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?
- A. $a+b+c=6$. B. $a+b+c=5$. C. $a+b+c=8$. D. $a+b+c=7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4;1;1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD+BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD+3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Giả sử } D(a;b;c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a-1=\frac{4}{3} \\ b-2=\frac{1}{3} \\ c-1=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{3} \\ b=\frac{7}{3} \\ c=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=6.$$

Câu 48. Cho tam giác ABC với $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$ có BD là đường phân giác trong của tam giác (D thuộc AC). Giả sử $\overrightarrow{BD} = (x; y; z)$, tính giá trị của $T = 3x + 3y + z$.

- A.** $T = -16$. **B.** $T = -10$. **C.** $T = 10$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác kẻ từ đỉnh B .

$$\text{Ta có } BA = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}; \quad BC = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2^2} = 2\sqrt{26}$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} 2(a-1) = -a-4 \\ 2(b-2) = -b+7 \\ 2(c+1) = -c+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{11}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Toạ độ } \overrightarrow{BD} = \left(\frac{-8}{3}; \frac{14}{3}; -2 \right).$$

$$\text{Như vậy } T = 3x + 3y + z = 4.$$

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là

- A.** $M(0;1;-4)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(0;1;-2)$. **D.** $M(0;1;4)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6), \quad \overrightarrow{AC} = (1; 3; -2), \quad \overrightarrow{AD} = (1; 6; -4) \text{ nên } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}| = 4MG.$$

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;0), B(2;4;0), C(2;2;1)$. Biết điểm $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tính $S = a - b + 3c$.

A. $S = -6$.

B. $S = -2$.

C. $S = 6$.

D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{HA} = (4-a; 2-b; -c), \overrightarrow{HB} = (2-a; 4-b; -c), \overrightarrow{BC} = (0; -2; 1), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; 1)$.

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}] = (-2; -2; -4) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{HA} = 2(a-4) + 2(b-2) + 4c = 2a + 2b + 4c - 12.$$

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-2) - c = 0 \\ 2(b-2) - c = 0 \\ 2a + 2b + 4c - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = 4 \\ 2b - c = 4 \\ a + b + 2c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow S = a - b + 3c = 2$$